Valeurs de la fonction zêta de Riemann aux points raisonnables

Etienne Besson

Institut Fourier (Grenoble)

Colloque Inter'Actions

22 mai 2014

Problème de Bâle

Problème de Bâle

Pietro Mengoli (1626–1686)

Problème de Bâle

Pietro Mengoli (1626–1686)

Théorème (Mengoli)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

Problème de Bâle

Pietro Mengoli (1626–1686)

Théorème (Mengoli)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log(2)$$

Problème de Bâle

Pietro Mengoli (1626–1686)

Théorème (Mengoli)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log(2)$$

Question (Mengoli, 1644)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = ?$$

Problème de Bâle

Réponse (1735)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Problème de Bâle

Réponse (1735)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Leonhard Euler (1707–1783)

Problème de Bâle

Réponse (1735)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Leonhard Euler (1707–1783)

Mais pourquoi en rester à l'exposant 2 ?

Fonction zêta de Riemann

Définition

$$\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \quad \text{pour } x > 1.$$

Fonction zêta de Riemann

Définition

$$\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \quad \text{pour } x > 1.$$

Théorème (Euler)

Pour tout entier positif n, il existe $\widetilde{B_n} \in \mathbf{Q}$ *explicite tel que*

$$\zeta(2n) = \pi^{2n} \times \widetilde{B_n}.$$

Fonction zêta de Riemann

Définition

$$\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} \quad \text{pour } x > 1.$$

Théorème (Euler)

Pour tout entier positif n, il existe $\widetilde{B_n} \in \mathbf{Q}$ explicite tel que

$$\zeta(2n) = \pi^{2n} \times \widetilde{B_n}.$$

Et $\zeta(2n+1)$?

Fonction zêta de Riemann

Définition

$$\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \quad \text{pour } x > 1.$$

Théorème (Euler)

Pour tout entier positif n, il existe $\widetilde{B_n} \in \mathbf{Q}$ explicite tel que

$$\zeta(2n) = \pi^{2n} \times \widetilde{B_n}.$$

Et $\zeta(2n+1)$?

Problème : identité de Parseval $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$

Théorème d'Apéry

Roger Apéry (1916–1994)

Théorème d'Apéry

Roger Apéry (1916–1994)

Théorème (Apéry, 1979)

$$\zeta(3) \notin \mathbf{Q}.$$

Théorème d'Apéry

Roger Apéry (1916–1994)

Théorème (Apéry, 1979)

$$\zeta(3) \notin \mathbf{Q}.$$

Théorème (Zudilin, 2001)

$$\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)\} \not\subset \mathbf{Q}.$$

Théorème d'Apéry

Wadim Zudilin

Théorème (Apéry, 1979)

$$\zeta(3) \notin \mathbf{Q}.$$

Théorème (Zudilin, 2001)

$$\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)\} \not\subset \mathbf{Q}.$$

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Topologie des groupes $\mathbf{Z} + \xi\mathbf{Z}$

- discret si ξ est rationnel ;
- dense si ξ est irrationnel.

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Topologie des groupes $\mathbf{Z} + \xi\mathbf{Z}$

- discret si ξ est rationnel ;
- dense si ξ est irrationnel.

Critère d'irrationalité

S'il existe $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ des suites d'entiers tels que

$$0 < |u_n + \xi v_n| \longrightarrow 0,$$

alors ξ est irrationnel.

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Topologie des groupes $\mathbf{Z} + \xi\mathbf{Z}$

- discret si ξ est rationnel ;
- dense si ξ est irrationnel.

Critère d'irrationalité

S'il existe $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ des suites d'entiers tels que

$$0 < |u_n + \xi v_n| \longrightarrow 0,$$

alors ξ est irrationnel.

Critère alternatif (équivalent)

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \ll \frac{1}{q_n}$$

« Les nombres bien approximés par les rationnels sont irrationnels. »

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Étapes de la démonstration du théorème d'Apéry

1. Trouver u_n et v_n tels que $|u_n + \zeta(3)v_n| \to 0$;

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Étapes de la démonstration du théorème d'Apéry

1. Trouver u_n et v_n tels que $|u_n + \zeta(3) v_n| \to 0$; (c'est dur !)

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Étapes de la démonstration du théorème d'Apéry

1. Trouver u_n et v_n tels que $|u_n + \zeta(3)v_n| \to 0$; (c'est dur !)
2. Prouver que $u_n + \zeta(3)v_n \neq 0$.

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Étapes de la démonstration du théorème d'Apéry

1. Trouver u_n et v_n tels que $|u_n + \zeta(3)v_n| \to 0$; (c'est dur !)
2. Prouver que $u_n + \zeta(3)v_n \neq 0$. (c'est dur !)

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Étapes de la démonstration du théorème d'Apéry

1. Trouver u_n et v_n tels que $|u_n + \zeta(3)v_n| \to 0$; (c'est dur !)
2. Prouver que $u_n + \zeta(3)v_n \neq 0$. (c'est dur !)

Utilisation de techniques *ad hoc* $\to$ généralisation / adaptation difficiles !

Comment montrer qu'un nombre $\xi \in \mathbf{R}$ est irrationnel ?

Étapes de la démonstration du théorème d'Apéry

1. Trouver u_n et v_n tels que $|u_n + \zeta(3)v_n| \to 0$; (c'est dur !)
2. Prouver que $u_n + \zeta(3)v_n \neq 0$. (c'est dur !)

Utilisation de techniques *ad hoc* $\to$ généralisation / adaptation difficiles !

Un sujet de recherche actuel : retrouver les suites d'Apéry par d'autres méthodes (qu'on espère plus faciles à adapter).

Changement de point de vue

Difficulté de regarder les valeurs une par une $\rightarrow$ on va plutôt essayer d'observer des tendances sur un grand nombre de valeurs.

Changement de point de vue

Difficulté de regarder les valeurs une par une $\rightarrow$ on va plutôt essayer d'observer des tendances sur un grand nombre de valeurs.
C'est le point de vue de la théorie analytique des nombres (cf exposés de Simon et Teddy).

Changement de point de vue

Difficulté de regarder les valeurs une par une $\rightarrow$ on va plutôt essayer d'observer des tendances sur un grand nombre de valeurs.
C'est le point de vue de la théorie analytique des nombres (cf exposés de Simon et Teddy).

Théorème (Ball-Rivoal, 2001)

$$\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\zeta(3) + \mathbf{Q}\zeta(5) + \cdots + \mathbf{Q}\zeta(2D+1)) \geq C \log(D).$$

Changement de point de vue

Difficulté de regarder les valeurs une par une $\to$ on va plutôt essayer d'observer des tendances sur un grand nombre de valeurs.
C'est le point de vue de la théorie analytique des nombres (cf exposés de Simon et Teddy).

Théorème (Ball-Rivoal, 2001)

$$\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\zeta(3) + \mathbf{Q}\zeta(5) + \cdots + \mathbf{Q}\zeta(2D+1)) \geq C \log(D).$$

Keith Ball & Tanguy Rivoal

Rareté des valeurs rationnelles aux points rationnels

Question vague

Avec quelle fréquence a-t-on $\zeta(\mathrm{rationnel}) = \mathrm{rationnel}$?

Rareté des valeurs rationnelles aux points rationnels

Question vague

Avec quelle fréquence a-t-on $\zeta(\mathrm{rationnel}) = \mathrm{rationnel}$?

Réponse vague

Avec fréquence 0.

Rareté des valeurs rationnelles aux points rationnels

Question vague

Avec quelle fréquence a-t-on $\zeta(\mathrm{rationnel}) = \mathrm{rationnel}$?

Réponse vague

Avec fréquence 0.

Théorème (Masser, 2011 ; B., 2012)

$$\#\left\{z \in [n, n+1] \cap \mathbf{Q}_{(d)} : \zeta(z) \in \mathbf{Q}_{(d)}\right\} \leq C(n)\frac{\log^2 d}{\log\log d},$$

où $\mathbf{Q}_{(d)} = \{\textit{rationnels de dénominateur au plus } d\}$.

Rareté des valeurs rationnelles aux points rationnels

Question vague

Avec quelle fréquence a-t-on $\zeta(\text{rationnel}) = \text{rationnel}$?

Réponse vague

Avec fréquence 0.

Théorème (Masser, 2011 ; B., 2012)

$$\#\left\{z \in [n, n+1] \cap \mathbf{Q}_{(d)} : \zeta(z) \in \mathbf{Q}_{(d)}\right\} \leq C(n) \frac{\log^2 d}{\log \log d},$$

où $\mathbf{Q}_{(d)} = \{\textit{rationnels de dénominateur au plus } d\}$.

Remarque

$$\#\left\{z \in [n, n+1] \cap \mathbf{Q}_{(d)}\right\} \sim C d^2$$

Démonstration du théorème de Masser

Théorème (Bombieri-Pila, 1989)

Il existe $P(z,w) \in \mathbf{C}[z,w]$ de degré « pas trop grand » tel que

$$\Big\{z \in [n, n+1] \cap \mathbf{Q}_{(d)} : \zeta(z) \in \mathbf{Q}_{(d)}\Big\} \subset \Big\{z \in \mathbf{C} : P(z, \zeta(z)) = 0\Big\} \cap B(0, n+1)$$

Démonstration du théorème de Masser

Théorème (Bombieri-Pila, 1989)

Il existe $P(z,w) \in \mathbf{C}[z,w]$ *de degré « pas trop grand » tel que*

$$\left\{ z \in [n, n+1] \cap \mathbf{Q}_{(d)} : \zeta(z) \in \mathbf{Q}_{(d)} \right\} \subset \left\{ z \in \mathbf{C} : P(z, \zeta(z)) = 0 \right\} \cap B(0, n+1)$$

David Masser, Enrico Bombieri & Jonathan Pila

Démonstration du théorème de Masser

Théorème (Bombieri-Pila, 1989)

Il existe $P(z,w) \in \mathbf{C}[z,w]$ de degré « pas trop grand » tel que

$$\left\{z \in [n, n+1] \cap \mathbf{Q}_{(d)} : \zeta(z) \in \mathbf{Q}_{(d)}\right\} \subset \left\{z \in \mathbf{C} : P(z, \zeta(z)) = 0\right\} \cap B(0, n{+}1)$$

David Masser, Enrico Bombieri & Jonathan Pila

Il suffit alors de montrer que la fonction $P(z,\zeta(z))$ n'a pas beaucoup de zéros dans $B(0,n+1)$ (outils : ζ est transcendante et analytique).

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

But

Construire $P(z,w) = \sum a_{k,l} z^k w^l$ tel que $P(z, \zeta(z))$ s'annule aux points prescrits (les rationnels de dénominateur $\leq d$ tels que blabla), notés $z_1, \ldots, z_N$.

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

But

Construire $P(z,w) = \sum a_{k,l} z^k w^l$ tel que $P(z,\zeta(z))$ s'annule aux points prescrits (les rationnels de dénominateur $\leq d$ tels que blabla), notés $z_1, \dots, z_N$.

Première idée

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta(z_1) & z_1 & \cdots & z_1^k \zeta(z_1)^l & \cdots \\ 1 & \zeta(z_2) & z_2 & \cdots & z_2^k \zeta(z_2)^l & \cdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & \zeta(z_N) & z_N & \cdots & z_N^k \zeta(z_N)^l & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{k,l} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

But

Construire $P(z,w) = \sum a_{k,l} z^k w^l$ tel que $P(z,\zeta(z))$ s'annule aux points prescrits (les rationnels de dénominateur $\leq d$ tels que blabla), notés $z_1, \ldots, z_N$.

Première idée

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta(z_1) & z_1 & \cdots & z_1^k \zeta(z_1)^l & \cdots \\ 1 & \zeta(z_2) & z_2 & \cdots & z_2^k \zeta(z_2)^l & \cdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & \zeta(z_N) & z_N & \cdots & z_N^k \zeta(z_N)^l & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{k,l} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème du rang : je peux trouver des $a_{k,l}$ convenables, mais le degré de P dépend alors de N, qui est inconnu !

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

Meilleure idée

- J'écris le système seulement pour $z_1, \ldots, z_k$.

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

Meilleure idée

- J'écris le système seulement pour $z_1, \ldots, z_k$.
- J'obtiens un polynôme P, de degré connu, tel que $P(z, \zeta(z)) = 0$ pour $z = z_1, \ldots, z_k$.

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

Meilleure idée

- J'écris le système seulement pour $z_1, \ldots, z_k$.
- J'obtiens un polynôme P, de degré connu, tel que $P(z, \zeta(z)) = 0$ pour $z = z_1, \ldots, z_k$.
- Je peux m'arranger pour que P soit à coefficients entiers, pas trop gros (« lemme de Siegel »).

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

Meilleure idée

- J'écris le système seulement pour $z_1, \ldots, z_k$.
- J'obtiens un polynôme P, de degré connu, tel que $P(z, \zeta(z)) = 0$ pour $z = z_1, \ldots, z_k$.
- Je peux m'arranger pour que P soit à coefficients entiers, pas trop gros (« lemme de Siegel »).
- Alors, si z est un point de mon ensemble distinct de $z_1, \ldots, z_k$, alors $P(z, \zeta(z))$ est :

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

Meilleure idée

- J'écris le système seulement pour $z_1, \ldots, z_k$.
- J'obtiens un polynôme P, de degré connu, tel que $P(z, \zeta(z)) = 0$ pour $z = z_1, \ldots, z_k$.
- Je peux m'arranger pour que P soit à coefficients entiers, pas trop gros (« lemme de Siegel »).
- Alors, si z est un point de mon ensemble distinct de $z_1, \ldots, z_k$, alors $P(z, \zeta(z))$ est :
  - « petit » car z est proche de $z_1, \ldots, z_k$;

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

Meilleure idée

- J'écris le système seulement pour $z_1, \ldots, z_k$.
- J'obtiens un polynôme P, de degré connu, tel que $P(z, \zeta(z)) = 0$ pour $z = z_1, \ldots, z_k$.
- Je peux m'arranger pour que P soit à coefficients entiers, pas trop gros (« lemme de Siegel »).
- Alors, si z est un point de mon ensemble distinct de $z_1, \ldots, z_k$, alors $P(z, \zeta(z))$ est :
  - « petit » car z est proche de $z_1, \ldots, z_k$;
  - rationnel de petit dénominateur car z_0 et $\zeta(z_0)$ le sont et $P \in \mathbf{Z}[x, w]$.

Démonstration du théorème de Bombieri-Pila

Meilleure idée

- J'écris le système seulement pour $z_1, \ldots, z_k$.
- J'obtiens un polynôme P, de degré connu, tel que $P(z, \zeta(z)) = 0$ pour $z = z_1, \ldots, z_k$.
- Je peux m'arranger pour que P soit à coefficients entiers, pas trop gros (« lemme de Siegel »).
- Alors, si z est un point de mon ensemble distinct de $z_1, \ldots, z_k$, alors $P(z, \zeta(z))$ est :
  - « petit » car z est proche de $z_1, \ldots, z_k$;
  - rationnel de petit dénominateur car z_0 et $\zeta(z_0)$ le sont et $P \in \mathbf{Z}[x, w]$.

  Nécessairement, $P(z, \zeta(z)) = 0$.

Conclusion

Conclusion

- Fréquence de $\zeta(\text{algébrique}) = \text{algébrique}\,?$

Conclusion

- Fréquence de $\zeta(\text{algébrique}) = \text{algébrique}$?
  Nécessité de filtrer à la fois par le degré et la « hauteur ».

Conclusion

- Fréquence de $\zeta(\text{algébrique}) = \text{algébrique}$?
  Nécessité de filtrer à la fois par le degré et la « hauteur ».

- Mêmes problèmes pour d'autres fonctions spéciales (Gamma d'Euler, fonctions elliptiques de Weierstraß, etc.).

Conclusion

- Fréquence de $\zeta(\text{algébrique}) = \text{algébrique}$?
  Nécessité de filtrer à la fois par le degré et la « hauteur ».

- Mêmes problèmes pour d'autres fonctions spéciales (Gamma d'Euler, fonctions elliptiques de Weierstraß, etc.).
  Propriétés essentielles : être « compliquée » algébriquement mais « régulière » analytiquement.

Conclusion

- Fréquence de $\zeta(\text{algébrique}) = \text{algébrique}$?
  Nécessité de filtrer à la fois par le degré et la « hauteur ».

- Mêmes problèmes pour d'autres fonctions spéciales (Gamma d'Euler, fonctions elliptiques de Weierstraß, etc.).
  Propriétés essentielles : être « compliquée » algébriquement mais « régulière » analytiquement.
  Propriété facultative : être « intéressante » arithmétiquement.

Conclusion

- Fréquence de $\zeta(\text{algébrique}) = \text{algébrique}$?
  Nécessité de filtrer à la fois par le degré et la « hauteur ».

- Mêmes problèmes pour d'autres fonctions spéciales (Gamma d'Euler, fonctions elliptiques de Weierstraß, etc.).
  Propriétés essentielles : être « compliquée » algébriquement mais « régulière » analytiquement.
  Propriété facultative : être « intéressante » arithmétiquement.

- Morale : on sait très peu de choses sur ces objets fondamentaux !